SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Davide Guidetti

ALCUNI PROBLEMI INVERSI PER EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI

13 giugno 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Summary. We introduce and discuss two inverse problems of identification of parameters for equations of mathematical physics of parabolic and hyperbolic type. Finally we consider a classical problem of identification of a domain for the Laplace equation.

Riassunto. Introduciamo e discutiamo due problemi inversi di identificazione di parametri per equazioni della fisica matematica di tipo parabolico e iperbolico. Infine consideriamo un classico problema di identificazione di un dominio per l'equazione di Laplace

É ben noto che molte equazioni differenziali e integrodifferenziali sono nate come modelli matematici di problemi fisici. Ció che é forse meno noto é che spesso la tradizionale struttura del problema, con certi dati e coefficienti supposti conosciuti e la soluzione completamente incognita, non rispecchia la situazione concreta a cui si trova di fronte il tecnico o lo scienziato. In molti casi, infatti, non si conosce o si conosce solo parzialmente il valore di certi coefficienti del problema. In compenso, si possiede qualche informazione sulla struttura della soluzione.

Consideriamo, ad esempio, l'andamento della temperatura u in un corpo Ω costituito da un materiale omogeneo con memoria. Se sono note l' andamento della temperatura fino a $t = 0$, se la temperatura é mantenuta costante sul bordo $\partial\Omega$ di Ω (per semplicitá, supponiamo $u(t,x) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \partial\Omega$) e se é noto il suo andamento prima di $t = 0$, un modello matematico standard di u (con qualche semplificazione) é costituito dal problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s,x)ds + f(t,x) & (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t \in [0,T], x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ove $h :]0,T] \to \mathbf{R}$ rende conto del fatto che il materiale é con memoria. Assegnata h, l'equazione (1) nell'incognita u é stata abbondantemente studiata. Nella pratica, peró, h é raramente conosciuta. A compensare questa carenza di informazione, é spesso possibile determinare l' andamento di un certo funzionale ϕ in corrispondenza della soluzione u. Per esempio, é talvolta possibile fissare un certo punto $x_1 \in \Omega$ e osservare l'andamento della temperatura $u(t, x_1)$ al variare di t in $[0,T]$. In tale caso, l'indeterminatezza di h é compensata dalla conoscenza di $u(t,x_1)$ per ogni $t \in [0,T]$. Piú in generale, supponiamo assegnato

$$\phi(u(t,.)) = g(t), \tag{2}$$

ove ϕ é un opportuno funzionale. Una versione astratta del problema (1)-(2) fu studiata per la prima volta nel lavoro [7].

La difficoltá principale del problema dipende essenzialmente dal fatto che, assegnata u, la prima condizione in (1) si traduce in un'equazione integrale di Volterra di prima specie nell'incognita h. Ció che si cerca di fare é trasformare questa equazione di prima specie in un'equazione di seconda

specie, derivando rispetto a t. Questo é possibile sotto ipotesi assai onerose riguardo ai dati.

Supponiamo, ad esempio, che sia $\phi(u(t,.)) = u(t,x_1)$, con x_1 fissato in Ω. Dato il tipo del funzionale, é conveniente lavorare nello spazio di Banach $X := C(\overline{\Omega})$. Nell'ipotesi che $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare, possiamo introdurre l' operatore A di dominio $\{u \in \bigcap_{1\leq p<+\infty} W^{2,p}(\Omega)|u_{|\partial\Omega} = 0, \Delta u \in X\}$. É ben noto (vedi, ad esempio, [9]) che l'operatore A genera un semigruppo analitico $(T(t))_{t\geq 0}$ in X, che non é peró fortemente continuo in 0. Eseguiamo i calcoli formalmente, supponendo che u sia una soluzione in senso classico di (1): con la solita convenzione di identificare funzioni nelle variabili (t,x) con corrispondenti funzioni della variabile a t a valori in uno spazio funzionale nelle variabili x, otteniamo

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) + \int_0^t h(t-s)Au(s)ds + f(t) & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, & \\ \phi(u(t)) = g(t), & t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3}$$

Sará anche necessario supporre $\phi(u_0) = g(0)$. Derivando rispetto a t e ponendo $v := \partial_t u$, otteniamo

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = Av(t) + h(t)Au_0 + \int_0^t h(t-s)Av(s)ds + f'(t) & t \in [0,T], \\ v(0) = Au_0 + f(0), & \\ \phi(v(t)) = g'(t), & t \in [0,T], \end{cases} \tag{4}$$

ove le ipotesi sui dati e su u dovranno essere tali da poter calcolare le derivate. Applicando ϕ alla prima equazione in (4) e usando il fatto che h é scalare, si ottiene

$$h(t)\phi(Au_0) + \phi(\int_0^t h(t-s)Av(s)ds + f'(t)) = g''(t). \tag{5}$$

Inoltre, dalla formula di variazione delle costanti otteniamo

$$v(t) = T(t)(Au_0+f(0)) + \int_0^t T(t-s)[h(s)Au_0+f'(s)+\int_0^s K(s-\sigma)Av(\sigma)d\sigma)]ds \tag{6}$$

Poniamo allora $w(t) := Av(t)$ e supponiamo che $\chi := \phi(Au_0) \neq 0$. Ci possiamo allora ricondurre al seguente sistema nelle incognite h e w:

$$\begin{cases} w(t) = A\int_0^t T(t-s)[\int_0^s h(s-\sigma)w(\sigma)d\sigma]ds \\ +A\int_0^t T(t-s)h(s)Au_0 ds + A\int_0^t T(t-s)f'(s)ds + AT(t)[Au_0 + f(0)], \\ h(t) = -\chi^{-1}\phi(\int_0^t h(t-s)w(s)ds) + \chi^{-1}(g''(t) - f'(t)). \end{cases} \tag{7}$$

Questo é un sistema di equazioni integrali di Volterra di seconda specie non lineare che puó essere risolto con tecniche di punto fisso, almeno su un intervallo sufficientemente piccolo. Riguardo, ad esempio, al problema (1) ponendo

$$\phi(u) := \int_{\Omega} u(x)\mu(dx), \tag{8}$$

con μ misura di Borel su $\overline{\Omega}$, vale il seguente risultato (vedi [7]):

Teorema 1 *Siano*

(I) α *e* $\beta \in \mathbf{R}$ *con* $0 < \beta \leq \min\{\alpha, 1-\alpha\}$ *e* $\beta \neq \frac{1}{2}$;

(II) $f \in C^{1+\beta}([0,T];X), g \in C^1([0,T]) \cap C^2(]0,T])$ *e* $t^{1-\alpha}g'' \in C^\beta([0,T])$;

(III) $u_0 \in D(A^2)$, $\int_{\overline{\Omega}} u_0(x)d\phi = g(0)$;

(IV) $Au_0 + f(0) \in D(A), A(Au_0 + f(0)) + \partial_t f(0) \in C_0^{2\beta}(\overline{\Omega})$, $\phi(Au_0 + f(0)) = g'(0)$, $\phi(Au_0) \neq 0$.

Allora esiste $\tau > 0$ *tale che il problema (3) ha un'unica soluzione* (u,h) *di dominio* $[0,\tau]$, *con le seguenti proprietá:*

(a) $u \in C^1([[0,\tau];X) \cap C^2(]0,\tau];X)$;

(b) $\Delta u \in C^1([0,\tau];X)$;

(c) h *é della forma* $h(t) = t^{\alpha-1}K(t)$, *con* $K \in C^\beta([0,\tau])$.

Questo primo risultato di Lorenzi e Sinestrari é stato poi successivamente esteso in varie direzioni (vedi, ad esempio, [4], [2], [1], [8]). Tra le varie questioni di interesse considerate, cito problemi per equazioni non lineari, studio dell'esistenza di soluzioni globali, il caso in cui ϕ sia a valori vettoriali, eccetera.

Consideriamo ora una classe di problemi di identificazione assai vasta, studiata nel lavoro [11] da Prilepko e Orlovskii. Si tratta di determinare le soluzioni (u,p) di un sistema della forma

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) + f(t, p(t), u(t)) & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ \phi(u(t)) = \psi(t), & t \in [0,T], \end{cases} \tag{9}$$

ove A é il generatore infinitesimale di un semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ nello spazio di Banach X, $f : [0,T] \times V \times X \to X$, con V spazio di Banach, e $\phi \in \mathcal{L}(X,V)$. Dovrá ovviamente valere la condizione di compatibilitá

$$\phi(u_0) = \psi(0). \tag{10}$$

Il procedimento é simile a quello seguito per il problema (1) – (2): dalla formula divariazione delle costanti, abbiamo

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,p(s),u(s))ds. \tag{11}$$

Facciamo ora l'ipotesi che f sia continua a valori in $D(A)$ e $u_0 \in D(A)$. Derivando allora l'equazione rispetto a t, ponendo $v(t) := u'(t)$ e applicando ϕ otteniamo

$$\psi'(t) = \phi(f(t,p(t),u(t)) + \phi(T(t)Au_0 + \int_0^t T(t-s)Af(s,p(s),u(s))ds). \tag{12}$$

Facciamo ora l'ipotesi seguente:

(h) per ogni $(t,u) \in [0,T] \times X$ $\phi(f(t,.,u))$ é una biiezione di V in sé, con inversa $F(t,.,u)$ lipschitziana uniformemente in (t,u).

Allora (12) puó essere riscritta nella forma

$$p(t) = F(t,\psi'(t) - \phi(T(t)Au_0 + \int_0^t T(t-s)Af(s,p(s),u(s))ds),u(t)). \tag{13}$$

Abbinando allora (13) à (11), si ottiene un sistema nelle incognite u e p risolubile localmente con metodi di punto fisso nella classe $C([0,\tau];D(A) \times V)$, purché τ sia sufficientemente piccolo.

Diamo un esempio di applicazione di questo risultato astratto: consideriamo il seguente sistema iperbolico:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \sum_{i=1}^n A_i(x)\partial_{x_i}u(t,x) + \Phi(t,x)p(t) & (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{14}$$

Qui le A_i sono matrici hermitiane di dimensione $N \times N$ a coefficienti di classe C^∞ limitati con tutte le derivate. L' incognita u sará naturalmente definita su $[0,\tau] \times \mathbf{R}^n$ e a valori in $\mathbf{C}^N$. Per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n$ $\Phi(t,x)$

é una matrice $N \times m$. Richiediamo che per ogni t le componenti di $\Phi(t,.)$ possiedano derivate di ogni ordine in $L^2(\mathbf{R}^n)$ e che tali derivate dipendano con continuitá da t. Aggiungiamo al problema (14) le m condizioni

$$l_i(u(x_i,t)) = \psi_i(t), 1 \leq i \leq m, \tag{15}$$

ove gli x_i sono punti prefissati di $\mathbf{R}^n$ e le l_i sono funzionali lineari su $\mathbf{C}^N$.

Forniamo ora a questo problema un'adeguata impostazione funzionale. Consideriamo lo spazio di Sobolev $X := H^s(\mathbf{R}^n)^N$ e l'operatore A definito come segue: $D(A)$ sará $\{u \in X | \sum_{i=1}^n A_i(x)\partial_{x_i}u \in X\}$, ove le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni. E' chiaro che $D(A)$ contiene $H^{s+1}(\mathbf{R}^n)^N$. E' noto (vedi, ad esempio, [10]) che per ogni $s \in \mathbf{N}_0$ A é il generatore infinitesimale di un semigruppo in X. Date le condizioni (15), dovremo scegliere s in modo che X sia costituito da funzioni continue. In base al teorema di immersione di Sobolev, ció accade se $s > \frac{n}{2}$. Supporremo allora che $u_0 \in H^{s+1}(\mathbf{R}^n)^N$ e, per $i = 1, ..., m$

$$l_i(u_0(x_i)) = \psi_i(0).$$

Poniamo $V = \mathbf{C}^m$ e In questo caso $f(t,p,u) = \Phi(t,.)p$. Osserviamo che in questo caso semplice f non dipende da u. Evidentemente, qualunque sia $p \in V$, avremo che $f(t,p,u) \in D(A)$. Infine, l'ipotesi (h) sará soddisfatta se per ogni $t \in [0,T]$ l'applicazione lineare da $\mathbf{C}^m$ in sé

$$p \to (l_1(\Phi(t,x_1)p), ..., l_m(\Phi(t,x_m)p))$$

é invertibile. Sotto tali condizioni, se $\psi \in C^1([0,T])$, il problema (14)-(15) avrá un' unica soluzione su ogni intervallo $[0,\tau]$ abbastanza piccolo.

Concludiamo questo seminario con un problema classico di identificazione per un'equazione ellittica.

Sia D la chiusura di un aperto limitato di $\mathbf{R}^3$. Consideriamo l'equazione

$$\Delta u(x) = \chi_D(x), \tag{16}$$

ove indichiamo con χ_D la funzione caratteristica di D e le derivate sono naturalmente considerate nel senso delle distribuzioni. Questo problema ha un'unica soluzione su $\mathbf{R}^3$ convergente a 0 per $|x| \to +\infty$. u si puó rappresentare nella forma

$$u(x) = \int_D E(x-y)dy, \tag{17}$$

con

$$E(x) = \frac{1}{4\pi|x|}. \tag{18}$$

Fisicamente u rappresenta (a meno di una costante moltiplicativa) il potenziale gravitazionale generato da un corpo di densitá uniforme che occupa la regione D.

Il problema che vogliamo affrontare fu giá posto circa duecento anni fa da Laplace ed é il seguente: supponiamo che D_1 e D_2 siano due sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ con le proprietá dichiarate, Ω sia un aperto regolare contenente nel proprio interno $D_1 \cup D_2$. Siano u_1 e u_2 i corrispondenti potenziali e valga

$$u_{1|\partial\Omega} = u_{2|\partial\Omega}. \tag{19}$$

Possiamo dire che $D_1 = D_2$? La risposta é in generale negativa (vedi, ad esempio, [5], 3.4). Tuttavia, se imponiamo qualche condizione di tipo geometrico a D_1 e D_2, la risposta puó essere positiva. Piú precisamente, vale il seguente

Teorema 2 *Se D_1 e D_2 sono stellati rispetto ai loro baricentri e vale (19), allora $D_1 = D_2$.*

Naturalmente il baricentro di D_j sará il vettore $L_3(D_j)^{-1} \int_{D_j} x dx$, ove con L_3 indichiamo la misura di Lebesgue. Dimostreremo il teorema 2 sotto l'ulteriore ipotesi che, per $j = 1, 2$, D_j abbia frontiera ∂D_j lipchitziana.

Cominciamo con il seguente lemma elementare, conseguenza quasi immediata della formula di Green:

Lemma 1 *Sia $u \in W^{2,1}(\Omega)$ tale che $-\Delta u = f$ in Ω. Sia poi v armonica su un aperto contenente $\overline{\Omega}$. Allora,*

$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial v}{\partial \nu}u - \frac{\partial u}{\partial \nu}v)d\sigma.$$

Passiamo ora a dimostrare il teorema 2. Poniamo, innanzi tutto, $u := u_1 - u_2$. Allora u é armonica sul complementare di Ω, si annulla su $\partial\Omega$ e tende a 0 quando $|x| \to +\infty$. Dal principio del massimo segue immediatamente che u é identicamente nulla su Ω^c e, dall'analiticitá delle funzioni armoniche, che u é identicamente nulla sulla componenente connessa di $\mathbf{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$ contenente Ω^c. Applicando ora il lemma 1, verifichiamo subito che per ogni v armonica su un aperto contenente $\overline{\Omega}$ vale

$$\int_{D_1} v(x)dx = \int_{D_2} v(x)dx. \tag{20}$$

Il risultato é facilmente estendibile a ogni v armonica su un aperto contenente $D_1 \cup D_2$. Applicando (20) con $v \equiv 1$, otteniamo che D_1 e D_2 hanno lo stesso volume. Sempre da (20) otteniamo anche

$$\int_{D_1} x_i dx = \int_{D_2} x_i dx$$

per $1 \leq i \leq 3$, da cui segue che D_1 e D_2 hanno lo stesso baricentro. Ricorrendo eventualmente a una traslazione, supporremo allora nel seguito che il baricentro coincida con l'origine.

Inoltre, se v é armonica, lo é anche $x \cdot \nabla v + 3v$. Applicando allora ancora (20) con $x \cdot \nabla v + 3v$ al posto di v e utilizzando la formula di Green, arriviamo a

$$\int_{\partial D_1} (x \cdot \nu) v d\sigma = \int_{\partial D_2} (x \cdot \nu) v d\sigma \tag{21}$$

per ogni v armonica su un aperto contenente $D_1 \cup D_2$. Con un passaggio al limite, (21) é estendibile a ogni v armonica nell'interno di $D_1 \cup D_2$ e continua in $D_1 \cup D_2$.

Poniamo ora $D := D_1 \cup D_2$, $\Gamma_1 := \partial D_1 \cap D_2$, $\Gamma_2 := \partial D_2 \cap D_1$. Sia $g \in C(\partial D)$. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0 & x \in int(D), \\ v_{|\partial D} = g. \end{cases} \tag{22}$$

Le ipotesi di regolaritá fatte su ∂D_1 e ∂D_2 garantiscono che per ogni $g \in C(\partial D)$ il problema (22) ha un'unica soluzione $v \in C(\overline{D})$ (vedi [3], cap. 2). Con questa scelta di v, (21) si puó riscrivere nella forma

$$0 = \int_{\partial D_1 \cap \partial D} (x \cdot \nu) g d\sigma - \int_{\partial D_2 \cap \partial D} (x \cdot \nu) g d\sigma + \int_{\Gamma_1} (x \cdot \nu) v d\sigma - \int_{\Gamma_2} (x \cdot \nu) v d\sigma. \tag{23}$$

Scegliamo g a valori in $[0, 1]$. Per il principio del massimo, anche v sará a valori in $[0, 1]$. Osserviamo inoltre che, poiché D_1 e D_2 sono stellati rispetto a 0, si ha $x \cdot \nu \geq 0$ quasi dappertutto su $\partial D_1 \cup \partial D_2$. Da tali considerazioni segue

$$-\int_{\Gamma_2} (x \cdot \nu) v d\sigma \geq -\int_{\Gamma_2} (x \cdot \nu) d\sigma$$

e

$$\int_{\Gamma_1} (x \cdot \nu) v d\sigma \geq 0,$$

da cui

$$0 \geq \int_{\partial D_1 \cap \partial D} (x \cdot \nu) g d\sigma - \int_{\partial D_2 \cap \partial D} (x \cdot \nu) g d\sigma - \int_{\Gamma_2} x \cdot \nu d\sigma$$

per ogni $g \in C(\partial D)$ e a valori compresi tra 0 e 1. Approssimando allora in $L^1(\partial D)$ con una successione di funzioni con queste proprietá la funzione caratteristica di $\partial D_1 \cap \partial D$, si conclude che

$$0 \geq \int_{\partial D_1 \cap \partial D} x \cdot \nu d\sigma - \int_{\Gamma_2} x \cdot \nu d\sigma = 3 L_3(D_1 \setminus D_2)$$

per la formula di Green (osserviamo in proposito che qui ν su Γ_2 é il versore normale interno a $D_1 \setminus D_2$).

Si conclude che $D_1 \subseteq D_2$. Scambiando i ruoli, si ottiene l'inclusione opposta.

Bibliografia

[1] F. Colombo, D. Guidetti, "Direct and inverse epidemic problems with diffusion in non-smooth domains", in elaborazione.

[2] F. Colombo, A. Lorenzi, "Identification of time and space dependent relaxation kernels for materials with memory related to cylindrical domains, I-II", Jour. Math. Anal. Appl. 213, 32-62 (1997), Jour. Math. Anal. Appl. 213, 63-90 (1997).

[3] D. Gilbarg, N. Trudinger, *"Elliptic partial differential equations of second order"* , Grun. Math. Wiss. 224, Springer-Verlag (1983).

[4] M. Grasselli, "An identification problem for a linear integrodifferential equation occurring in heat flow", Math. Appl. Scie. vol. 15, 167-186 (1992).

[5] V. Isakov, *"Inverse source problems"*, A.M.S. Math. Surv. Mono. 34 (1990).

[6] V. Isakov, *"Inverse problems for partial differential equations"*, Springer (1998).

[7] A. Lorenzi, E. Sinestrari, "An inverse problem in the theory of materials with memory", Nonlinear Anal., vol. 12, n. 12, 1317-1335 (1988).

[8] A. Lorenzi, E. Sinestrari, "Stability results for a partial integrdifferential inverse problem", Pitman Research Notes in Math. 190, 271-294 (1989).

[9] A. Lunardi, *"Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems"*, Progress in nonlinear diff. Eq. appl., vol. 16, Birkhäuser (1995).

[10] S. Mizohata, *"The theory of partial differential equations"*, Cambridge University Press (1973).

[11] A.I. Prilepko, D. G. Orlovskii, "Determination of the evolution parameter of an equation and inverse problems of mathematical physics I, II", Diff. Equa. 21, 96-104, 472-477 (1985).